European Graduate Program
Berlin - Zürich
Combinatorics

02A1 Lecture & Exercise
Sequencing Welding Robots

Martin Grötschel

Block Course at TU Berlin
"Combinatorial Optimization at Work“

October 4 – 15, 2005

Martin Grötschel

- Institut für Mathematik, Technische Universität Berlin (TUB)
- DFG-Forschungszentrum “Mathematik für Schlüsseltechnologien” (MATHEON)
- Konrad-Zuse-Zentrum für Informationstechnik Berlin (ZIB)

groetschel@zib.de http://www.zib.de/groetschel

Contents

1. Recalling the TSP and Exercise 1
2. The real problem
3. What should be solved?

Contents

1. Recalling the TSP and Exercise 1
2. The real problem
3. What should be solved?

Combinatorial optimization

Given a finite set E and a subset $\mathcal{I}$ of the power set of E (the set of feasible solutions). Given, moreover, a value (cost, length,...) c(e) for all elements e of E. Find, among all sets in $\mathcal{I}$, a set I such that its total value c(I) (= sum of the values of all elements in I) is as small (or as large) as possible.

The parameters of a combinatorial optimization problem are: (E, $\mathcal{I}$, c).

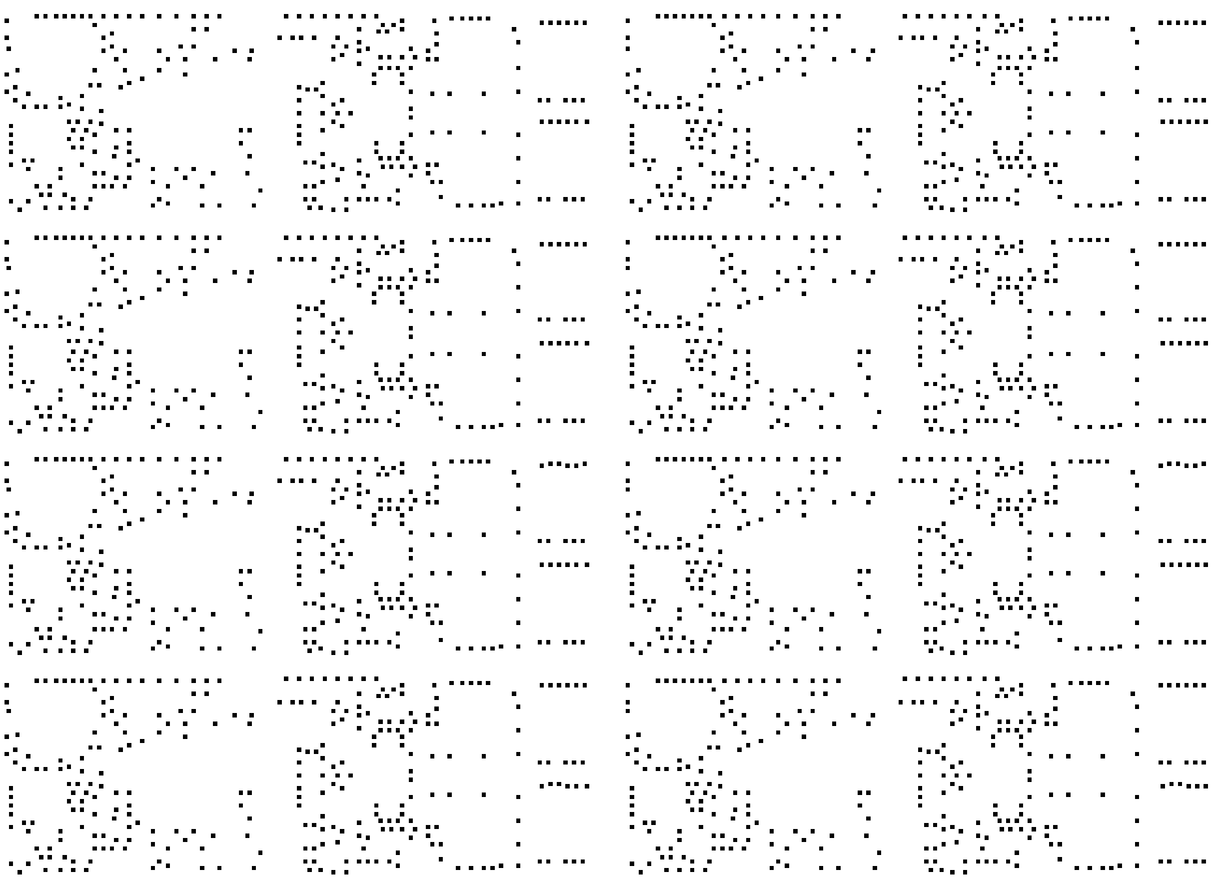
$$\min\left\{ c(\mathrm{I}) = \sum_{e\in \mathrm{I}} c(e) \mid \mathrm{I} \in \mathcal{I} \right\},\ \textit{where}\ \mathcal{I} \subseteq 2^{E}\ \textit{and}\ E\ \textit{finite}$$

The travelling salesman problem

Given n „cities“ and „distances“ between them. Find a tour (roundtrip) through all cities visiting every city exactly once such that the sum of all distances travelled is as small as possible. (TSP)

The TSP is called symmetric (STSP) if, for every pair of cities i and j, the distance from i to j is the same as the one from j to i, otherwise the problem is called aysmmetric (ATSP).

Correct modelling of a printed circuit board drilling problem



length of a move of the drilling head:

Euclidean norm,

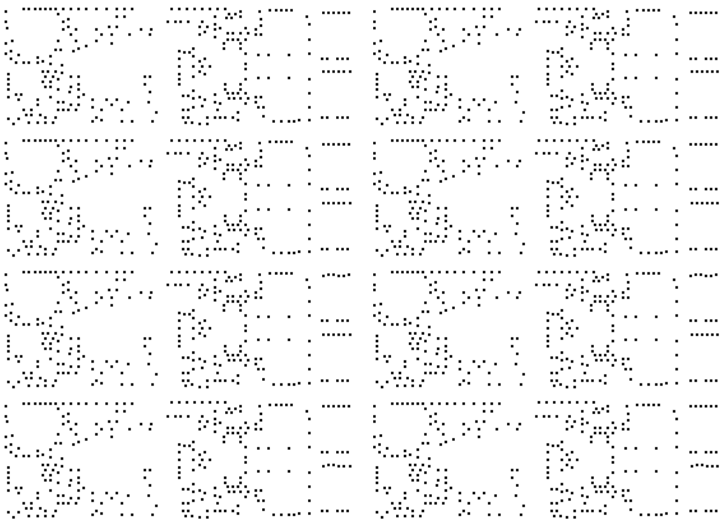
Max norm,

Manhattan norm?

2103 holes to be drilled

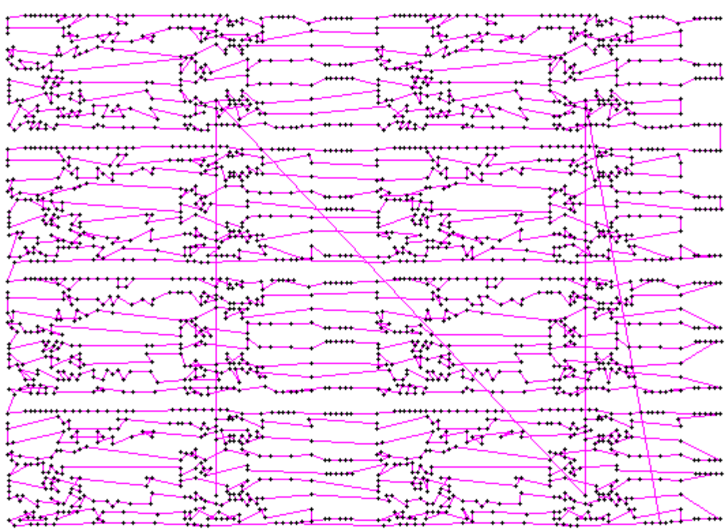
Martin Grötschel

Drilling 2103 holes into a PCB

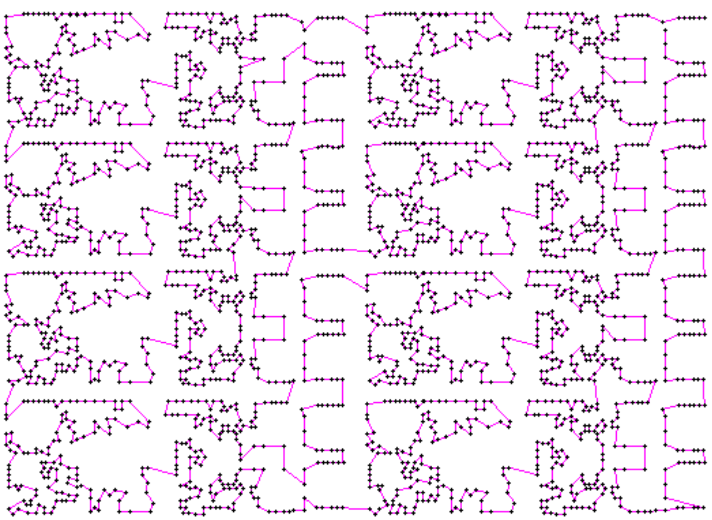


Significant Improvements via TSP

(Padberg & Rinaldi)



industry solution



optimal solution

Sketch of a Laser Machine for Mask Drawing or Hole Drilling

Picture deleted

Martin Grötschel

Laser Welding a Golf Plus with Robots

Picture deleted

distance

function ?

Exercise 1

In the beginning of the operation, each robot stays in a pre-assigned starting position. The car part is moved into the working space and fixed. As soon as it is in the right position, the robot starts moving and welding. The robot performs two different tasks.

- It moves to some point and beams a laser flash onto this point (point welding).
- It moves to a point and directs a laser beam beginning at this point along a pre-programmed line to a pre-specified second point (line welding).

It should be mentioned that in the line welding mode the robot is allowed to move along the welding path in both directions. The task is to find a sequence of moves of the robot that takes minimum time. There are two versions of the problem.

a) While moving from one welding job to the next one, the robot can switch from the point to the line welding mode (and vice versa) without creating a delay.

b) Point welding and line welding have to be performed successively.

Your task:

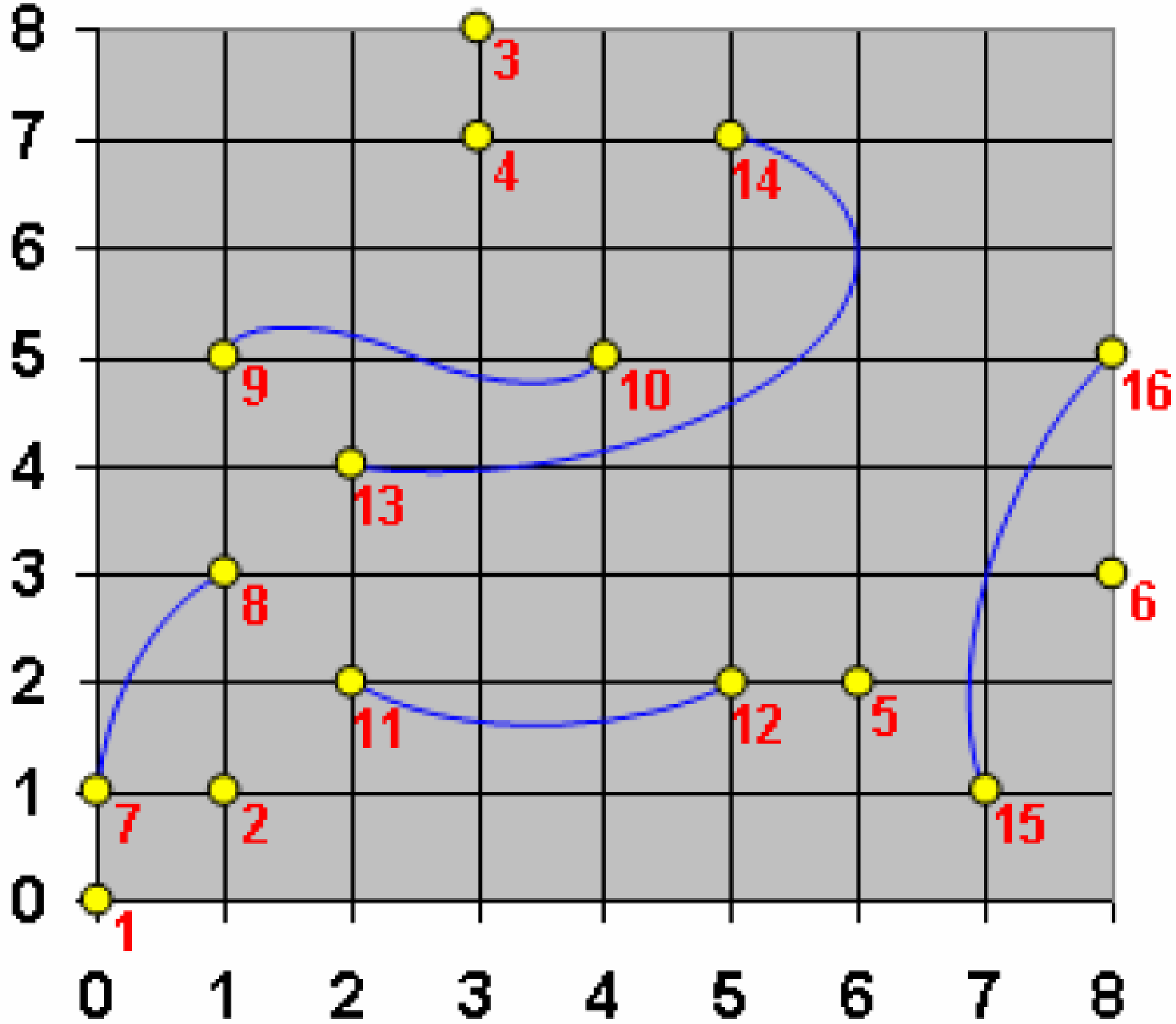
a) Find an integer programming formulation for each of the two problems (a) and (b) above.

b) Write ZIMPL programs for your integer programs.

c) Solve the (didactical) instance of the problem described below (using some IP code of your choice, e. g., CPLEX or SCIP).

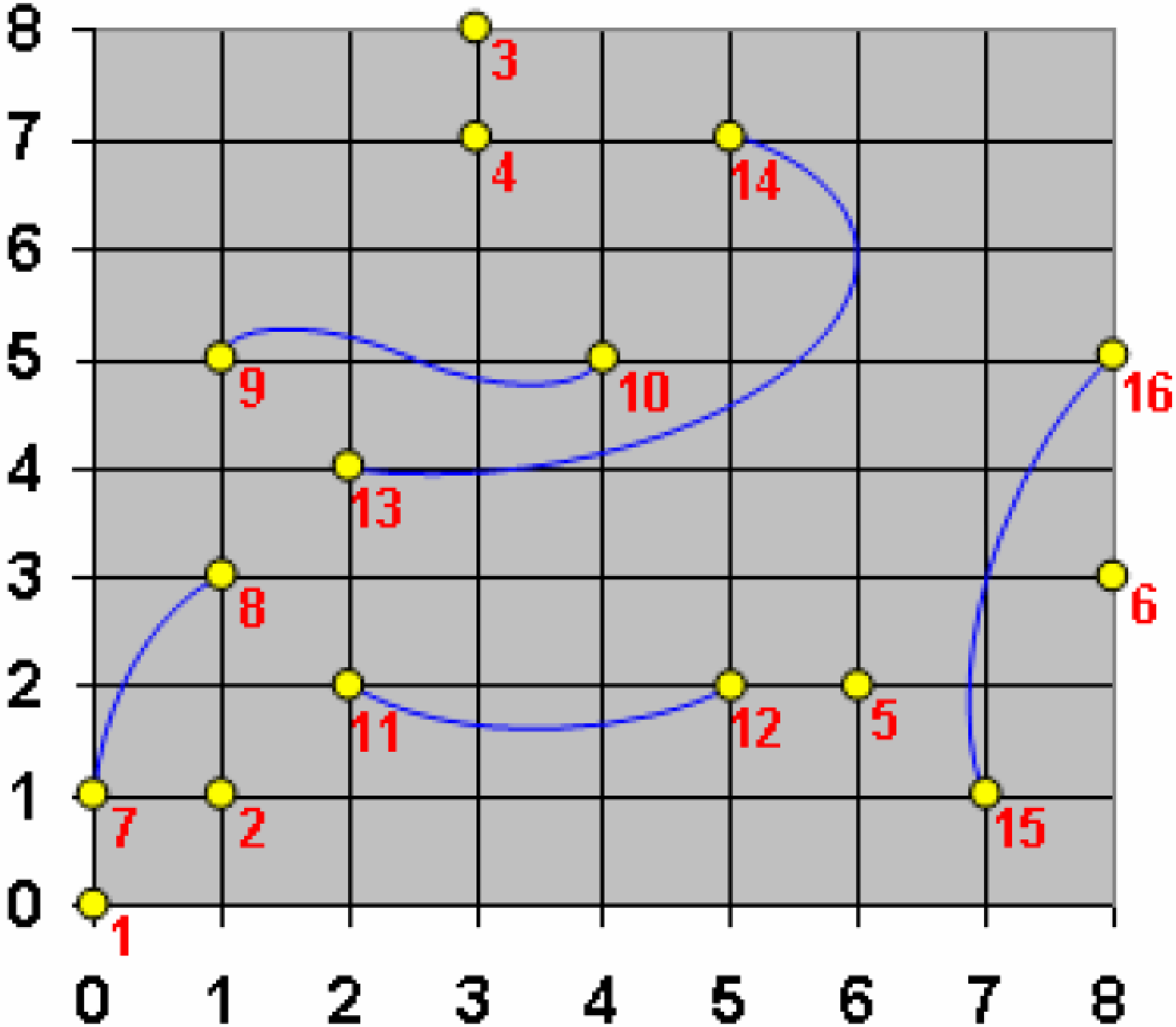
If you think that the problem is not specified in full detail, you are probably right. But don't bother us with questions. Your solution of the problem consists also of a list of issues that you think have not been described completely and that should be clarified before starting to optimize the problem. What questions would you ask the car manufacturing engineers so that you exactly know what to do?

Didactical Welding (a) (with mode switching)



Martin Grötschel

Didactical Welding (b) (point and line flashing consecutively)



Contents

1. Recalling the TSP and Exercise 1
2. The real problem
3. What should be solved?

The Travelling Salesman Problem and Some of its Variants

- The symmetric TSP
- The asymmetric TSP
- The TSP with precedences or time windows
- The online TSP
- The symmetric and asymmetric m-TSP
- The price collecting TSP
- The Chinese postman problem
  (undirected, directed, mixed)
- Bus, truck, vehicle routing
- Edge/arc & node routing with capacities
- Combinations of these and more

- new: tour packing

Laser Welding of one door of a Golf Plus with Robots

Picture deleted

Terms

Laserquelle: Benötigter Energieversorger für Schweißroboter, während diese Schweißaufgaben bearbeiten. Während die Roboter zwischen einzelnen Schweißaufgaben verfahren, ist keine Energiezufuhr durch eine Laserquelle erforderlich. Jede Laserquelle kann nacheinander mehrere Roboter speisen. Die Laserquellen benötigen etwa 100 ms zum Umschalten. Allerdings kann jeder Roboter nur von einer einzigen vorab festgelegten Laserquelle versorgt werden.

Nullstellung: Position eines Schweißroboters, in der er die Bearbeitung zu Beginn der Prozesszeit aufnimmt und zu der er vor Ende der Prozesszeit zurückkehren muss.

Prozesszeit: Zeit, in der alle Schweißaufgaben in der Laserschweißanlage fertiggestellt werden müssen (Größenordnung: 24 s bis zu 2 min).

Roboterschweißpfad: Kompletter Pfad eines Roboters durch eine Menge von Schweißaufgaben. Dieser spezifiziert für jede der enthaltenen Schweißaufgaben den Startzeitpunkt sowie die Richtung, in der die Schweißnaht gefertigt wird. Ein Roboterschweißpfad beginnt und endet in der Nullstellung des Roboters.

Schweißaufgabe: Von einem Schweißroboter zu fertigende Schweißnaht. Alle Schweißnähte können in einer beliebigen der beiden möglichen Richtungen von einem Randpunkt zum anderen geschweißt werden.

Schweißroboter: Werkzeug zur Durchführung von Schweißaufgaben. Allerdings kann nicht jeder Roboter jede Schweißnaht fertigen.

Schweißzeit: Zeit, die eine bestimmte Schweißnaht benötigt, um gefertigt zu werden. Die Schweißzeit ist nicht abhängig von dem eingesetzten Roboter. Enthalten ist nicht die spezielle zusätzlich anfallende Anfahrtszeit, die der bearbeitende Roboter benötigt, um mit der nötigen Geschwindigkeit zu der Naht zu kommen. Diese ist vollständig in der entsprechenden Verfahrzeit enthalten.

Verfahrzeit: Zeit, um einen bestimmten Roboter von einem Randpunkt einer Schweißnaht zu einem Randpunkt einer anderen Schweißnaht zu bewegen, so dass der Roboter danach direkt mit dem Schweißen beginnen kann. Das heißt, die Zeit für die passende Anfahrt zum direkten Schweißbeginn ist enthalten. Diese Zeit ist abhängig vom Roboter.

Martin Grötschel

Goals

A Entscheidungen

Die möglichen Entscheidungen bei der Planung der Roboterschweißpfade geben die Freiheitsgrade an, unter denen optimiert werden kann. Die zu treffenden Entscheidungen im Einzelnen sind die folgenden:

1. Zuordnung der Roboter auf Laserquellen
2. Zuordnung der Schweißaufgaben auf Roboter
3. Wahl der Roboterschweißpfade

B Nebenbedingungen

Die folgenden Nebenbedingungen müssen unbedingt eingehalten werden:

1. Jede Schweißaufgabe wird von einem Roboter übernommen.
2. Jedem Roboter werden nur solche Schweißaufgaben zugeordnet, deren Bearbeitung ihm möglich ist.
3. Die Zeit der Durchführung jedes Roboterschweißpfades ist durch die Prozesszeit beschränkt.
4. Wann immer ein Roboter eine Schweißnaht bearbeitet, schweißt gleichzeitig kein anderer Roboter, der von derselben Laserquelle gespeist wird.
5. Die Zeit zwischen den Schweißphasen zweier von derselben Laserquelle versorgten Roboter ist mindestens die Umschaltzeit der Laserquelle.
6. Roboter dürfen nicht kollidieren.

C Ziel

Die oben genannten zu treffenden Entscheidungen sind dahingehend zu optimieren, dass so wenig Laserquellen wie möglich für die Durchführung der Roboterschweißpfade benötigt werden. Insgesamt soll herausgefunden werden, inwieweit Laserquellen im Karosseriebau bei Volkswagen eingespart werden können.

Exact Model?

- Homework!

Rapid Prototyping: A Heuristic Model

Sei $J(i) := j_1(i), \ldots, j_{n_i}(i)$ die Menge an Schweißaufgaben, die von Roboter i in dieser Reihenfolge ausgeführt werden. Für einen Scheißauftrag $j_k(i)$ bezeichne $d(j_k(i))$ abkürzend die Verfahrzeit vom Endrandpunkt der Schweißnaht bis zum Startrandpunkt von $j_{k+1}(i)$ für $k < n_i$ bzw. bis zurück in die Nullstellung für $k = n_i$. Außerdem bezeichne $s(i)$ den frühest zulässigen Zeitslot zum Starten der Schweißaufgaben $j_1(i)$ im Schweißpfad von Roboter i. Dieser ergibt sich aus der Verfahrzeit von der Nullstellung zur ersten Naht. Seien weiter:

$$x_{jt} := \begin{cases} 1, & \text{falls Schweißaufgabe } j \text{ in Zeitslot } t \text{ beginnt,} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$y_{it} := \begin{cases} 1, & \text{falls Roboter } i \text{ in Zeitslot } t \text{ schweißt,} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$u_{il} := \begin{cases} 1, & \text{falls Roboter } i \text{ von Laserquelle } l \text{ gespeist wird,} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$v_{i_1 i_2} := \begin{cases} 1, & \text{falls Roboter } i_1 \text{ und } i_2 \text{ von derselben Laserquelle gespeist werden,} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Martin Grötschel

A Heuristic Model

$$
\begin{aligned}
&\min z \quad \text{s.t.} && && \text{(S)}\\
\sum_{t\in T}(t+d(j_{n_i}(i)))y_{it} &\le z && \forall i\in I\\
\sum_{j\in J(i)}\sum_{k=t-p(j)+1}^{t} x_{jk} &\le y_{it} && \forall i\in I, t\in T\\
v_{i_1i_2} &\ge u_{i_1l}+u_{i_2l}-1 && \forall i_1\in I, i_2\in I\setminus\{i_1\}, l\in L\\
\sum_{t\in T} x_{jt} &= 1 && \forall i\in I, j\in J(i)\\
\sum_{l\in L} u_{il} &= 1 && \forall i\in I\\
\sum_{t\in T} t x_{j_1(i)t} &\ge s(i) && \forall i\in I\\
\sum_{t\in T}(t+p(j_k(i))+d(j_k(i)))x_{j_k(i)t}-\sum_{t\in T} t x_{j_{k+1}(i)t} &\le 0 && \forall i\in I, j_k\in J(i)\setminus\{j_{n_i}(i)\}\\
y_{i_1t}+y_{i_2t} &\le 2-v_{i_1i_2} && \forall i_1\in I, i_2\in I\setminus\{i_1\}, t\in T\\
x_{jt} &\in\{0,1\} && \forall j\in J, t\in T\\
u_{il} &\in\{0,1\} && \forall i\in I, l\in L\\
y_{it} &\ge 0 && \forall i\in I, t\in T\\
v_{i_1i_2} &\ge 0 && \forall i_1\in I, i_2\in I\setminus\{i_1\}
\end{aligned}
$$

Martin Grötschel

Results

Results table deleted

Another Heuristic Model

Given is a set of robots I, a set of laser sources L, and one robot welding path

$$j_1(i) \to j_2(i) \to \ldots \to j_{n_i}(i)$$

for each robot $i \in I$, where n_i is the number of welding jobs processed by robot i and the corresponding set of welding jobs is denoted by $J(i) := \{j_k(i) | k \in [n_i]\}$ ($[n] := \{1, \ldots, n\}$). Each welding job $j_k(i)$ has a processing time $p_{j_k(i)}$ and a driving time $d_{j_k(i)}$ which is required by robot i to reach the next welding job $d_{j_{k+1}(i)}$ if $k < n_i$ or the robot's null position if $k = n_i$. Moreover, each robot i cannot start processing its first welding job $j_1(i)$ before time s_i (this time is needed to reach the first welding job). An amount of δ time units is required to switch the output of one laser source to between two robots.

The task is to assign each welding robot one laser source and to modify the robot welding paths by inserting waiting times in such a way that each robot is fed by the corresponding laser source whenever the robot is processing a welding job. (Each laser source can only feed one robot at each moment.) The objective is to minimize the makespan of all robot paths.

Another Heuristic Model

The problem described above can be formulated by an integer program in terms of the following variables. Variable $x_{j_k(i)}$ denotes the starting time of processing the kth welding job of robot i, and the variable v_{i_1,i_2} is set to 1 if the robots i_1 and i_2 are fed by the same laser source. Moreover, there are some binary variables:

$$u_{i,l} := \begin{cases} 1, & \text{if robot } i \text{ is fed by laser source } l, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$$y_{j_k(i_1),j_l(i_2)} := \begin{cases} 0, & \text{if welding job } j_k(i_1) \text{ is processed earlier than job } j_l(i_2), \\ 1, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

The IP formulation is the following:

$$\begin{aligned} \min \quad z \quad & \text{s.t.} \\ x_{j_{n_i}(i)} + p_{j_{n_i}(i)} + d_{j_{n_i}(i)} \le z \quad & \forall i \in I \\ x_{j_1(i)} \ge s_i \quad & \forall i \in I \\ x_{j_k(i)} + p_{j_k(i)} + d_{j_k(i)} \le x_{j_{k+1}(i)} \quad & \forall i \in I, \forall k \in [n_i - 1] \\ x_{j_k(i_1)} + p_{j_k(i_1)} + \delta \le x_{j_l(i_2)} + M y_{j_k(i_1),j_l(i_2)} + M(1 - v_{i_1,i_2}) \quad & \forall i_1 \in I, i_2 \in I \setminus \{i_1\}, \forall k \in [n_{i_1}], l \in [n_{i_2}] \\ x_{j_l(i_2)} + p_{j_l(i_2)} + \delta \le x_{j_k(i_1)} + M(1 - y_{j_k(i_1),j_l(i_2)}) + M(1 - v_{i_1,i_2}) \quad & \forall i_1 \in I, i_2 \in I \setminus \{i_1\}, \forall k \in [n_{i_1}], l \in [n_{i_2}] \\ v_{i_1,i_2} \ge u_{i_1,l} + u_{i_2,l} - 1 \quad & \forall i_1 \in I, i_2 \in I \setminus \{i_1\}, l \in L \\ \sum_{l \in L} u_{i,l} = 1 \quad & \forall i \in I \\ u_{i,l} \in \{0,1\} \quad & \forall i \in I, \forall l \in L \\ y_{j_k(i_1),j_l(i_2)} \in \{0,1\} \quad & \forall i_1 \in I, i_2 \in I \setminus \{i_1\}, \forall k \in [n_{i_1}], l \in [n_{i_2}] \end{aligned}$$

solution time for

VW problem: < 1 sec

Contents

1. Recalling the TSP and Exercise 1
2. The real problem
3. What should be solved?

Overall Goal

- distribute the welding tasks “appropriately” to stations and robots so that ... .

02A1 Lecture & Exercise

Sequencing Welding Robots

The End

Martin Grötschel

- Institut für Mathematik, Technische Universität Berlin (TUB)
- DFG-Forschungszentrum "Mathematik für Schlüsseltechnologien" (MATHEON)
- Konrad-Zuse-Zentrum für Informationstechnik Berlin (ZIB)

groetschel@zib.de http://www.zib.de/groetschel